Varianta 47

Subiectul I.
a) $a = 2$.
b) 5.
c) $|z| = 1$.
d) Raza cercului este $r = 2$.
e) $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} = 0$.
f) Aria pătratului este $S = 4$.

Subiectul II.
1.
a) $y_V = -\frac{1}{4}$ este valoarea minimă a funcției f.
b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2}$.
c) $y \in \{0, \log_3 2\}$.
d) $t \in \{2, 4\}$.
e) $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ a & b \end{vmatrix} = 2$.

2.
a) $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathbf{R}$.
b) $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
c) Ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f este $Ox: y = 0$.
d) $\lim_{n\to\infty} \left(n^2 \cdot f(n)\right)^{2n} = 1$.
e) $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Subiectul III.
a) Se arată prin reducere la absurd.
b) Funcția polinomială asociată polinomului f este strict crescătoare şi de grad impar.
c) Pentru $f \in \mathbf{Q}[X]$, avem $f(a) = 0$, deci $0 \in \mathbf{Q}(a)$.
Considerăm polinomul $g = f + 1 \in \mathbf{Q}[X]$. Deoarece $g(a) = f(a) + 1 = 1$, $1 \in \mathbf{Q}(a)$.
d) Evident.

e) Se arată prin dublă incluziune. La „$\subset$” se foloseşte teorema împărţirii cu rest, pentru polinoamele g şi f.

f) Deoarece $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ este rădăcină a lui f, avem $a^3 = -2a - 2 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$

Considerăm $p, q, r \in \mathbf{Q}$, astfel încât $p + qa + ra^2 = 0$.

Înmulţind relaţia precedentă cu $a \neq 0$ şi reducându-l pe a^2, deoarece $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, rezultă $pqr = 2r^2q + q^3 = -2r^3$, adică $q^3 + 2r^2q + 2r^3 = 0$ (1)

Dacă $r \neq 0$, împărţind relaţia precedentă la $r^3 \neq 0$ deducem că $\alpha = \dfrac{q}{r} \in \mathbf{Q}$ este o rădăcină a lui f, contradicţie cu punctul **a)**.

Obţinem că $r = 0$ şi din apoi $q = 0$ şi $p = 0$.

g) Presupunem că $a^{2006} = t \in \mathbf{Q}$. Considerăm polinomul $g \in \mathbf{Q}[X]$, $g = X^{2006} - t$.

Se arată că $g = f \cdot q$, deci toate rădăcinile lui f sunt şi rădăcini ale lui g. Deoarece toate rădăcinile lui g au acelaşi modul, rezultă că şi rădăcinile a, x_2, x_3 ale lui f sunt de module egale. Avem $|a|^3 = |a \cdot x_2 \cdot x_3| = \left|-\dfrac{2}{1}\right| = 2$, de unde rezultă $a = -\sqrt[3]{2}$.

Cum $f\left(-\sqrt[3]{2}\right) = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \neq 0$, am ajuns la o contradicţie, aşadar $a^{2006} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Subiectul IV.

a) Se arată prin calcul direct.

b) Se arată prin calcul direct.

c) $f_2(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2} + \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

d) Se arată prin calcul direct.

e) Se foloseşte principiul întâi al inducţiei matematice şi punctul **b)**.

f) Din punctul **e)** ştim că $f_{2006}(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ şi cum $f'_{2007} = f_{2006}$, deducem că funcţia f_{2007} este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, deci injectivă.

Deoarece f_{2007} este continuă pe $\mathbf{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_{2007}(x) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x \to \infty} f_{2007}(x) = +\infty$, rezultă că $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}$, deci f este şi surjectivă. În concluzie, f este bijectivă.

g) Din punctul **a)** deducem că $f''_{2006}(x) = f'_{2005}(x) = f_{2004}(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, de unde rezultă că funcţia f_{2006} este convexă pe $\mathbf{R}$.